*Условие:* Функция f(n) задана соотношением f(1)=1, f(n)=2f(|n/2|)+10n+1 при n>1. Докажите, что существует константа c, такая что f(n)<=cnlog2nдля всех целых n>1.

*Доказательство:*

Докажем, что существует константа c, такая что f(n)<=cnlog2nдля всех целых n>1. Для этого воспользуемся методом математической индукции и докажем, что из предположения выполнения данных условий для n=k следует выполнение условий для n=k+1.

1.При n=1 функция определена как 1.

2.При n=2:

F(2)=2f(1)+10\*2+1=23.

23<=2\*c\*log2(2)

23<=2c (выполняется при с>=12). F(2)<(c[2]=12)

3.Предполагаем, что f(k)=2f(|k/2|)+10k+1 <=c[k]

4. f(k+1)=2f(|(k+1)/2|)+10(k+1)+1=

2f(|k/2|)-2f(|k/2|)+2f(|(k+1)/2|)+10k+1+10=

=f(k)+2f(|(k+1)/2|)-2f(|k/2|)+10<=

<=c[k]+ 2f(|(k+1)/2|)-2f(|k/2|)+10 (при условии, что (|(k+1)/2|)-f(|k/2|)>=0 )

Докажем, что f(|(k+1)/2|)-f(|k/2|)>=0:

1.При k=2: f(|(2+1)/2|)-f(|2/2|)= f(1)-f(1)=0

2.Предположим, что при k=t: f(|(t+1)/2|)-f(|t/2|)>=0

3. f(|((t+1)+1)/2|)-f(|(t+1)/2|)=

=f(|(t+1)/2+1/2|)-f(|t/2+1/2|)

Если аргументы функций одинаково изменяются, то одинаково изменяются и значения функций.

Ч.т.д.